Paradoxie mathematisch betrachtet

Zum Wesen echt paradoxer Aussagen

Gebhard Greiter, 2011

Das mit Sicherheit einfachste Beispiel einer wirklichen Paradoxie – einer Paradoxie also, die jeder formalen Prüfung standhält – ist der Satz

A: Diese Aussage A ist falsch.

Dennoch behaupte ich (siehe http://greiterweb.de/spw/Logisches.htm) dass auch jede wirklich echte Paradoxie letztlich auf einen Denkfehler zurückzuführen ist.

Worin also liegt in diesem Beispiel der Denkfehler?

Er liegt, wie jetzt bewiesen werden soll, in der Formulierung dieser Paradoxie selbst: Rein logisch muss man nämlich unterscheiden zwischen Aussageformen einerseits und Aussagen andererseits: Eine ***Aussageform*** – etwas, das aussieht wie eine ***Aussage*** – wird formal gesehen ja erst dann zu einer Aussage, wenn es möglich wird, ihr einen Aussagewert (***true*** oder ***false***) zuzuordnen; ob man ihn kennt oder nicht, ist unerheblich. Solche Zuordnung – und jetzt kommt's – ist aber keineswegs immer möglich. So kann etwa der Aussageform

Martin ist krank

kein Wahrheitswert zugeordnet werden, solange man nicht weiß, von welchem Martin hier die Rede ist.

Der oben als Beispiel einer Paradoxie gegebenen Aussageform **A** aber kann sogar nie ein Wahrheitswert w(**A**) zugeordnet werden. Wäre solche Zuordnung nämlich wenigstens zeitweise möglich, so würde das bedeuten, dass zu jenem Zeitpunkt die Gleichung

w(**A**) = w(Wahrheitswert w(**A**) ist der Wert ***false***)

eine Lösung w(**A**) hat. Sie müsste – als Wahrheitswert – ***true*** oder ***false*** sein. Da nun aber keiner dieser beiden Werte Lösung der Gleichung ist, zeigt sich, dass **A** zu keinem Zeitpunkt Aussage sein kann.

Die Annahme also, **A** sei eine Aussage, war der gesuchte Denkfehler.

Wie man sieht, sollte die mathematische Logik dahingehend verallgemeinert werden, dass in ihrem Zentrum Aussageformen stehen und deren zeitabhängige Abbildung auf Werte w(t,A) der Menge { ***true***, ***false***, ***undefined*** }.

Dass mathematische Logik bisher solche Zeitabhängigkeit ignoriert, wird wohl einfach daran liegen, dass die Mathematik ganz grundsätzlich zeitunabhängig argumentiert (Zeitparameter haben bisher nur Anwendungen der Mathematik).

Wahrscheinlich sind mathematische Gesetze (ganz gleich, ob der Mensch sie kennt oder nicht) die einzigen Aussagen, die

zeitunabhängigen Wahrheitswert haben,

sich aber dennoch auf keinen bestimmten Zeitpunkt beziehen.

Physikalische Gesetze – so könnte man meinen – seien Gegenbeispiele. Aber schon das weiß man so genau nicht, denn manche Physiker (solche, die Stringtheorien erforschen), wollen nicht mehr ausschließen, dass neben unserem Universum noch weitere existieren, darunter auch solche, in denen andere physikalische Gesetze gelten.